Prof. Dr. Otmar Venjakob
Andreas Riedel

Seminar

Theorie p-adischer Darstellungen nach Fontaine

Sommersemester 2011

Ort: HS 3 **Zeit**: 14 Uhr c.t. **Begin**: 14.04.2011

Sei p eine Primzahl und $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung. Eine *p-adische Darstellung* ist ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}_p$-Vektorraum V mit stetiger linearer $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-Operation. Diese Darstellungen finden sich ganz natürlich in der Geometrie, da z.B. Tate-Module von Abelschen Varietäten oder allgemeiner étale Kohomologiegruppen von Schemata mit einer solchen Operation von G_K ausgestattet sind, und sind daher sehr wichtig für das Studium der Arithmetik solcher Varietäten.

Als technische Grundlagen werden wir zunächst Witt-Vektoren (und evtl. im nicht perfekten Fall Cohen-Ringe) sowie die Verzweigungstheorie p-adischer Lie-Erweiterungen studieren. Anschliessend werden wir uns einen Überblick über die Theorie der ℓ-adischen Darstellungen (d.h. V ist ein Vektorraum über $\mathbb{Q}_\ell$, $\ell \neq p$) verschaffen, die sich wesentlich von der der p-adischen Darstellungen (d.h. $\ell = p$) unterscheidet. Für später werden wir die notwendigen Ergebnisse der Theorie von Sen über $\mathbb{C}_p$ bereitstellen.

Wir werden die verschiedenen "grossen Ringe" $B_{HT},\ B_{dR},\ B_{st}, B_{crys}$ für Hodge-Tate, de Rahm, semi-stabil, kristallin, von Fontaine einführen, die es uns erlauben, von B_*-zulässigen Darstellungen ($* \in \{\mathrm{HT, dR, st, crys}\}$) zu reden. Diese sind jeweils mit einer Operation von G_K ausgestattet, sodass man den Funktor $D_*(V) := (B_* \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ von der Kategorie der p-adischen Darstellungen in die Kategorie der filtrierten K bzw. K_0-Vektorräume (mit Zusatzstruktur, abhängig von B_*) betrachten kann. Eine p-adische Darstellung V heisst dann beispielsweise de Rahm, falls $\dim_K D_{dR}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Schliesslich wollen wir je nach verbleibender Zeit folgende Sätze ansteuern:

Theorem A. (*p-adische Monodromie Vermutung*) Jede de Rahm-Darstellung von G_K ist potentiell semi-stabil.

Theorem B. D_{st} induziert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der semi-stabilen p-adischen Darstellungen und der Kategorie der zulässigen, filtrierten (φ, N)-Moduln über K.

Der harmlose Zusatz potentiell bedeutet, dass man evtl. mit dem Körper K einen endlichen Schritt L/K aufsteigen muss. Die Eigenschaften zulässig, filtriert sowie die Operationen von φ, N auf B_{st} werden wir im Laufe des Seminars einführen.

Zwischendurch werden wir für die verschiedenen Klassen von B_*-Darstellungen Beispiele aus der Geometrie kennenlernen, da viele Bezeichnungen daran angelehnt sind. Im Falle einer abelschen Varietät A ist etwa die zugehörige Darstellung des Tate-Moduls kristallin genau dann, wenn A gute Reduktion hat, und semi-stabil genau dann, wenn A semi-stabile Reduktion hat. Ist $V = H^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ für eine glatte projektive Varietät X/K, so ist V B_{dR}-zulässig, und man erhält mit $D_{dR}(V) \cong H^i_{dR}(X/K)$ den Vergleichsisomorphismus $B_{dR} \otimes_K H^i_{dR}(X/K) \cong B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H^i_{\acute{e}t}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$.

Als Grundlage für das Seminar dient das neue Lehrbuch von Fontaine und Ouyang [1]. Hilfreich auch für weitere Ausblicke ist der Übersichtsartikel von Berger [2]. Eine etwas ältere Quelle mit mehr Betonung auf die Geomtrie ist [3].

Vorträge: Die Angaben im folgenden beziehen sich, soweit nicht anders erwähnt, auf das Buch von Fontaine und Ouyang. Jeder Vortrag ist auf eine Sitzung (90 Minuten) ausgelegt.

1) *Witt-Vektoren*: Konstruktion, strikte p-Ringe, universelle Eigenschaft, 0.2.2-0.2.3 (S. 8-17). Evtl. 0.2.1 (S. 6-8) rekapitulieren.

2) *Galois Gruppen und Verzweigungsgruppen lokaler Körper*: Trägheitsgruppe, wilde Trägheitsgruppe, Satz von Herbrand, Verzweigung unendlicher Galoiserweiterungen, Differente, Diskriminante, 0.3.1-0.3.5 (S. 20-30).

3) *Verzweigung in p-adischen Lie-Erweiterungen*: Sens Filtrierungssatz, total verzweigte $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen, 0.4.1-0.4.2 (S.30-38). Schliesslich kurze Wiederholung nicht-abelscher Kohomologie, 0.5.2 (S. 41-44, je nach verbleibender Zeit).

4) *ℓ-adische Darstellungen*: Lineare Darstellungen zu topologischen Gruppen, Beispiele: Tate-Modul, Etale Kohomologie, Darstellungen über endlichen Körpern, über lokalen Körpern, potentielle Semi-Stabilheit im ℓ-adischen Fall, 1.1.1-1.3.1 (S. 45-58). Falls noch Zeit auch 1.3.2-1.3.3 (S.58-63). Dies ist ein Übersichtsvortrag ohne viele Beweise.

5) *p-adische Darstellungen*: B-Darstellungen, B-Zulässigkeit, 2.1.1-2.1.2 (S. 65-70), die Ringe $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{E}^{\mathsf{ur}}}$, $\widehat{\mathcal{E}^{\mathsf{ur}}}$-Darstellungen, 2.3.1 bis ausschliesslich Definition 2.24 (S. 78), 2.3.2-2.3.3 bis inklusive Proposition 2.30 (S.80-81).

6) *Lemma von Ax-Sen*: Krasners Lemma, Lemma von Ax-Sen in Charakteristik 0, (fast) etaler Abstieg, Entvollständigung, 3.1.1-3.2.2 (S.87-95), ohne Proposition 3.6.

7) *C-Darstellungen und Sens Operator*: Eigenschaften von C-Darstellungen, Sens Θ-Operator, Sens Hauptsatz, 3.2.3-3.3.1 (S.96-102), C-zulässige Darstellungen, $\overline{K}$-zulässige Darstellungen, 3.5.1-3.5.3 (S. 110-113).

8) *Der Ring R*: Konstruktion von $R(A)$ für kommutativen Ring A, Eigenschaften von $R = R(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, Operation der Galois-Gruppe auf R, die Elemente π und ε, 4.1.1-4.2.2 (S.115-123).

9) *Die Ringe B_{HT}, B_{dR}*: Definition der Ringe, Hodge-Tate Darstellungen, de Rham Darstellungen, die Periode t, 5.1.1-5.2.5 bis einschliesslich Proposition 5.29 (S. 138-149).

10) *Die Ringe B_{cris}, B_{st}*: Definition der Ringe, Frobenius, Logarithmus, Monodromie-Operator, 6.1.1-6.1.5 (S. 165-174)

11) *Eigenschaften von B_{cris}*: Filtrierung, exakte Sequenzen, 6.2.1-6.2.3 (S. 174-183).

12) *Semi-stabile Darstellungen*: kristallin impliziert semi-stabil, Definition von t_H, t_N, zulässige filtrierte (φ, N)-Moduln, 6.3.1-6.4.1 (S. 183-192)

13) *Theoreme A und B*: Statement der Sätze, Newton- und Hodge-Polynome, Beispiele in Dimension 1 und 2, 6.5.1-7.1.5 (S. 192-204)

Interessenten können sich mit dem gewünschten Vortrag bei mir melden:
`ariedel@mathi.uni-heidelberg.de`

Literatur: [1] Jean-Marc Fontaine and Yi Ouyang, *Theory of p-adic Galois representations*, 2010, `http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/galoisrep.pdf`.

[2] Laurent Berger, *An introduction to the theory of p-adic representations*, 2004, `http://www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/article05/article05.pdf`.

[3] Jean-Marc Fontaine (Ed.), *Periodes p-adiques,* Astérisque 223. Paris: Société Mathématique de France.